

基于多变量灰色系统的 乏信息堤防变形短期预测模型

顾冲时¹, 崔欣然¹, 顾 昊¹, 吴 艳², 朱明远², 林 旭³, 郭 瑞³

(1. 河海大学 水利水电学院, 江苏 南京 210098; 2. 新疆水利水电科学研究院, 新疆 乌鲁木齐 830049;
3. 淮安市水利勘测设计研究院有限公司, 江苏 淮安 223001)

摘要: 依据信息模糊和不确定状态下乏信息数据处理理论, 提出了一种改进多变量灰色系统的乏信息堤防短期预测模型; 引入多变量灰色模型对多测点的沉降变形序列进行拟合, 结合混沌粒子群优化算法和分数阶微积分理论, 实现了在乏信息条件下对堤防多测点变形的短期预测; 由对比结果可知, 研究提出的模型可行且有效, 填补了堤防乏信息处理模型的空白。

关键词: 乏信息; 堤防; 多变量灰色模型; 分数阶微积分; 混沌粒子群算法

中图分类号: TV698.2 **文献标识码:** B **文章编号:** 1007-7839(2024)06-0001-0005

Short term prediction model of poorinformation levee deformation based on multi-variable grey system

GU Chongshi¹, CUI Xinran¹, GU Hao¹, WU Yan², ZHU Mingyuan², LIN Xu³, GUO Rui³

(1. College of Water Conservancy and Hydropower Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;
2. Xinjiang Institute of Water Resources and Hydropower Research, Urumqi 830049, China;
3. Huai'an Water Conservancy Survey Design and Research Institute Co., Ltd., Huai'an 223001, China)

Abstract: Based on the theory of data processing of poorinformation under fuzzy and uncertain information, an improved multi-variable grey system short-term prediction model of poorinformation levee is proposed. The multi-variable grey model is introduced to fit the sedimentation deformation sequence of multi-measuring points. Combined with chaotic particle swarm optimization algorithm and fractional calculus theory, the short-term prediction of deformation of multi-measuring points is realized under the condition of lack of information. The comparison results show that the proposed model is feasible and effective, filling the gap in the poorinformation processing model of levee flood.

Key words: poorinformation; levee; multi-variable grey model; fractional calculus; chaotic particle swarm optimization algorithm

堤防工程的空间跨度广阔, 水文地质条件和隐患分布呈现出显著的随机性变化特点^[1]。受监测技术、经费以及管理条件的限制, 堤防工程的勘察工

作通常面临区域背景资料少、精度低、现场地址调查难以开展及安全隐患多等困难, 位于堤防内部的监测仪器通常难以获得所需的数据资料, 导致监测

收稿日期: 2024-03-27

基金项目: 江苏省水利科技项目(2022024); 河海大学中央高校基本科研业务费项目(B230201011); 国家自然科学基金(U2243223, 52379122); 江苏省科协青年科技人才托举工程(TJ-2022-076); 安徽省自然科学基金联合基金(2208085US17); 新疆维吾尔自治区水利科技专项(XSKJ-2023-23)

作者简介: 顾冲时(1962—), 男, 教授, 博士, 主要从事水工结构安全监控研究。E-mail: csgu@hhu.edu.cn

通信作者: 顾昊(1990—), 男, 教授, 博士, 主要从事水工结构安全监控研究。E-mail: ghao@hhu.edu.cn

值数据序列的概率分布常常未知。乏信息(贫信息),是指研究对象的特征信息不完备与不充分。目前乏信息数据处理技术在滚动轴承的预测与评估中应用较为广泛^[2-3],而在水利工程尤其是堤防工程中却鲜有提及^[4-5]。但总体来说,目前针对堤防的监测资料、外部水情、环境变化等有关资料十分匮乏的窘境,对堤防信息进行挖掘和识别,研究乏信息条件下堤防变形预测方法,对构建堤防安全监控方法,及时识别乏信息情况下堤防险情具有重要意义。

堤防在运行和管理的过程中,面临诸多无法确定的因素,且其变形数据具有小样本、贫信息的数据特征。灰色系统对具有乏信息特征的数据进行建模时有独特的优势,在研究数据或变量信息不完全已知的情况下,可以挖掘已知信息内部所隐藏的变化规律。此外,将分数阶理论与灰色模型结合,将阶次推广至分数阶次能够极大地提高灰色模型的适用性,在保留灰色模型求解过程简洁特点的同时大幅提升预测效果,是灰色模型的一种较为有效的改进形式。在实际的堤防工程中,每个监测点的变形变化都并非独立,而是会受到相邻监测点变形的影响,同时每个监测点也会影响其他点的变形。

因此,对堤防的监测分析不能只注重单个监测点的局部研究,应当充分考虑监测点之间的关联性,从堤防观测系统的整体角度来描述其测点的变形趋势和变形规律。基于上述理论,本文构建改进多变量灰色系统OFMGM(r, n)的乏信息堤防变形短期预测模型,以挖掘、拟合和预测堤防乏信息数据,提出乏信息条件下堤防变形预测方法。

1 模型构建

1.1 基于分数阶累加的灰色模型

灰色系统理论假定 $X^{(0)} = [x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)]$ 为原始数据序列,通过累加生成其一阶累加序列 $X^{(1)} = [x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)]$, 其中

$$x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i), k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

类似地,将累加算子拓展到非整数阶,若 $x^{(r)}(k)$ 与 $x^{(r-1)}(k)$ 之间满足关系 $x^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(r-1)}(i)$, 则称 $x^{(r)}(k)$ 为 $x^{(r-1)}(k)$ 的 r 次累加生成值。灰色模型的 r 阶拓展式的系数 $a(k)$ 可由下式计算:

$$a(k) = \sum_{i=1}^k \frac{(k-i+1)(k-i+2) \cdots (k-i+r-1)}{(r-1)!} = \frac{(r+k-i-1)!}{(k-i)!(r-1)!} = \frac{\Gamma(r+k-i)}{\Gamma(k-i+1)\Gamma(r)} \quad (2)$$

此时得到:

$$X^{(r)}(k) = \sum_{i=1}^k a(k)x^{(0)}(i) \quad (3)$$

式(3)适用于任意正实数,可以称之为分数阶累加的分数阶拓展形式。

1.2 基于混沌粒子群算法改进的分数阶累加灰色模型

在分数阶灰色模型中,不同的累加阶数将对数据的预测精度产生差异性影响,因此确定最优阶数尤为重要。为求出使平均相对误差(mean relative error, MRE)最小的阶次,引入混沌粒子群算法^[6-7]进行阶次优化。基于混沌优化的粒子群算法(chaotic particle swarm optimization, CPSO)利用混沌优化的随机性质,来增强粒子群算法的全局搜索能力,能够在一定程度上避免传统粒子群算法中精度低、易发散、容易陷入局部最优解的问题。同时,由于采用了混沌优化生成随机数序列, CPSO 算法还能够增加算法的随机性和多样性,从而更好地探索搜索空间。

在传统粒子群算法中,每个优化问题的可能解都被视为在搜索空间中的一个独立的粒子。在搜索过程中,算法要求每个粒子维护相应的速度向量 v_i 和位置向量 x_i 。假设在一个 N 维的搜索空间中,群体中共有 m 个粒子。其中第 i 个粒子在搜索空间中的位置可表示为

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN}), i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

第 i 个粒子的速度可以表示为

$$V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN}), i = 1, 2, \dots, m \quad (5)$$

通过将 x_i 代入目标函数来计算其适应值,经过迭代操作后,如果粒子新的适应度函数值大于个体历史最优解,则该新的适应度函数值成为该粒子当前的历史最优解。每个粒子第 n 维的速度和位置按如下方程进行迭代更新:

$$v_{in} = \omega v_{in} + c_1 \times \text{rand}_1(p_{in} - x_{in}) + c_2 \times \text{rand}_2(p_{in} - x_{in}) \quad (6)$$

$$x_{in} = x_{in} + v_{in} \quad (7)$$

其中: $p_i(p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})$ 表示第 i 个粒子的个体已知最优解; $p_g(p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gN})$ 表示种群已知最优解。 ω 为惯性权重, c_1 和 c_2 称为学习因子, rand_1 和 rand_2 分别为 $[0, 1]$ 范围内的随机数,用以增加粒子飞行的随机性。 ω 用来控制粒子以前速度对现在速度的影响,

在更新过程中,算法要求粒子的速度在一个由用户设定的最大速度 v_{\max} 的范围内。为保证粒子能快速地收敛到最佳位置,同时保证其收敛精度,本文将混沌优化与粒子群算法结合,算法步骤如下:

步骤1:设定种群大小 m 、搜索空间维数 N 、最大迭代次数 T ,将粒子群和资源系数进行初始化。

步骤2:利用 Logistic 混沌映射构成混沌空间方法,其混沌映射和迭代式见式(8)即

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \quad (8)$$

式中: $a \in [0, 4]$, a 越接近 4 时, x_n 越接近平均分布到 $[0, 1]$ 区域,当 a 取为 4 时,呈现完全混沌状态,映射分布均匀性达到极限。

步骤3:更新全局最优粒子。计算 $p(t)$,若 $x_{n+1} < p(t)$,则计算遍历参考点 $x(t, n)$ 和随机动态邻域半径向量,通过比较确定个体最优粒子 p_i 与全局最优粒子;否则,令 $p_g = p_i$,转到步骤4。

步骤4:若满足终止条件或 $t > T$,则转步骤5;否则转到步骤3。

步骤5:输出最优解 p_{best} 、 g_{best} ,运行终止。

1.3 多变量改进分数阶灰色系统的乏信息堤防短期预测模型

多变量灰色模型 MGM(1, n) 并非 n 个一阶灰色模型的堆叠组合,而是对 n 个 n 元微分方程进行联立求解,将变量彼此之间互相影响的关系引入模型的建立过程。设在堤防内部埋设有 n 个相邻的变形监测点,其中每个监测点已获得 m 长度的变形观测资料,则其可以构成的变形观测序列为 $X^{(0)}$,其中 $X^{(0)}(k) = \{x_i^{(0)}(k)\} (k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n)$,经上节混沌粒子群算法的优化过程后,得到分数阶模型的最优阶数 r ,则原始数据序列的 r 阶累加生成向量序列为 $x_i^{(r)}(k) = \sum_{j=1}^k x_i^{(0)}(j)$,式中 $k=1, 2, \dots, m; i=1, 2, \dots, n$ 。

考虑堤防中 n 个相关联的变形监测点的相互影响,对变形序列建立 n 元 r 阶常微分方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1^{(r)}}{dt} &= a_{11}x_1^{(r)} + a_{12}x_2^{(r)} + \dots + a_{1n}x_n^{(r)} + b_1 \\ \frac{dx_2^{(r)}}{dt} &= a_{21}x_1^{(r)} + a_{22}x_2^{(r)} + \dots + a_{2n}x_n^{(r)} + b_2 \\ &\vdots \\ \frac{dx_n^{(r)}}{dt} &= a_{n1}x_1^{(r)} + a_{n2}x_2^{(r)} + \dots + a_{nn}x_n^{(r)} + b_n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

写成矩阵形式:

$$\frac{dX^{(r)}}{dt} = AX^{(r)} + B \quad (10)$$

式中: $X^{(r)}(t) = [x_1^{(r)}(t), x_2^{(r)}(t), \dots, x_n^{(r)}(t)]^T$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \circ$$

由积分生成变换原理,对式(10)两边左乘 e^{-At} 可得:

$$e^{-At} \left[\frac{dX^{(r)}}{dt} - AX^{(r)} \right] = e^{-At} B \quad (11)$$

为了得到模型参数的估计值,对连续的微分方程进行离散化,采用最小二乘估计计算得到参数矩阵 A 和 B 的估计值矩阵 \hat{D} :

$$\hat{D} = (\hat{A}, \hat{B})^T = (L^T L)^{-1} L^T Y \quad (12)$$

式中:

$$L =$$

$$\begin{bmatrix} (x_1^{(r)}(1) + x_1^{(r)}(2))/2 & (x_2^{(r)}(1) + x_2^{(r)}(2))/2 & \dots & (x_n^{(r)}(1) + x_n^{(r)}(2))/2 & 1 \\ (x_1^{(r)}(2) + x_1^{(r)}(3))/2 & (x_2^{(r)}(2) + x_2^{(r)}(3))/2 & \dots & (x_n^{(r)}(2) + x_n^{(r)}(3))/2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (x_1^{(r)}(m-1) + x_1^{(r)}(m))/2 & (x_2^{(r)}(m-1) + x_2^{(r)}(m))/2 & \dots & (x_n^{(r)}(m-1) + x_n^{(r)}(m))/2 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) & x_2^{(0)}(2) & \dots & x_n^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) & x_2^{(0)}(3) & \dots & x_n^{(0)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(0)}(m) & x_2^{(0)}(m) & \dots & x_n^{(0)}(m) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{1n} & \hat{a}_{2n} & \dots & \hat{a}_{nn} \\ \hat{b}_1 & \hat{b}_2 & \dots & \hat{b}_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

从式(15)中即可得到矩阵 A 和 B 的估计值 \hat{A} 和 \hat{B} :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ \hat{a}_{12} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{1n} & \hat{a}_{2n} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix} \quad (16)$$

将式(11)写成离散形式,可得:

$$\hat{X}^{(r)}(k) = e^{\hat{A}(k-1)} (\hat{X}^{(r)}(1) + \hat{A}^{-1} \hat{B}) - \hat{A}^{-1} \hat{B} \quad (17)$$

式中: $e^{\hat{A}(k-1)} = I + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\hat{A}^i}{i!} (k-1)^i$ 。

将式(17)作累减还原,有:

$$\hat{X}^{(0)}(k) = \hat{X}^{(r)}(k) - \hat{X}^{(r)}(k-1), k=2, 3, \dots \quad (18)$$

第 i 个变量的相对误差为

$$r_i(t_k) = \frac{\hat{x}_i^{(0)}(t_k) - x_i^{(0)}(t_k)}{x_i^{(0)}(t_k)} \times 100\% \quad (19)$$

数据序列的平均误差为

$$f = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m |r_i(k)| \right) \quad (20)$$

使用混沌粒子群优化算法设分数阶的阶数 r 为设计变量,以最小平均相对误差(MRE)为目标函数,求解最优阶数的问题转化为求解如下优化问题:

$$\text{MRE} = \min f(r) = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \left| \frac{\hat{x}_i^{(0)}(t_k) - x_i^{(0)}(t_k)}{x_i^{(0)}(t_k)} \times 100\% \right| \quad (21)$$

改进多变量灰色系统的预测模型计算步骤,如图1所示。

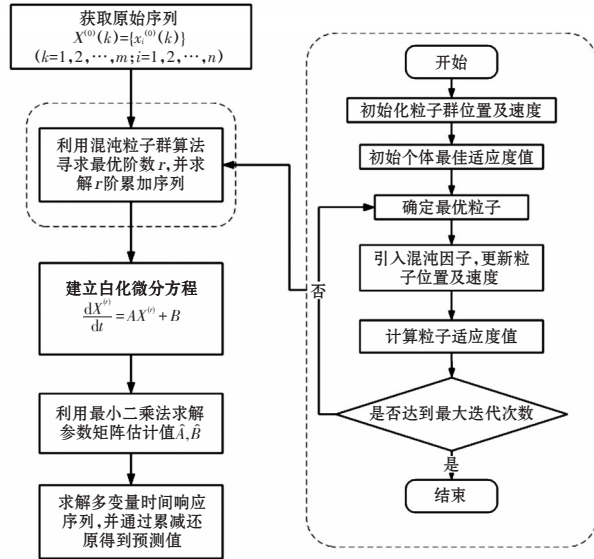


图1 混沌粒子群算法优化的非等间隔分数阶灰色模型实现流程

2 工程实例

2.1 工程概况

某海塘位于我国东南沿海地区,堤顶高程为6.4 m,防浪墙高程为7.2 m,设计标准为50年一遇,工程级别为Ⅲ等,主要建筑物级别为3级,工程于2014年7月完工。该堤防工程采用土石结构、桩基土石结构和轻型框架结构。在海塘表面变形自动化观测中沿堤线每500 m布置一个观测断面,每个断面布设3个表面变形测点,并以沿江水闸桩基处布设的设备为监测基准点。

海塘沉降变形测值受到潮水位和风速变化影

响较大,呈现明显的日周期变化:水位在较短时间内的变化较快,在每日12:00达到最大值;各测点风速亦呈明显的日周期变化,一般在每日的12:00左右风速达到最高。由于监测仪器的缺失或损坏,仅采集了2023年1月10日至2月14日的沉降变形数据,且数据分布不连续。因此,以海堤表面某4个相邻的变形监测点为例,取监测日12:00的监测数据输入模型中,得到原始的变形监测数据序列 $X^{(0)}$ (单位:mm)为

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.8 & 0.9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.7 & 0.7 & 0.9 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (22)$$

2.2 计算过程

由于海堤变形绝对值的数量级在1 mm以下,故需要在建模前对原始的变形数据序列进行预处理。由文献[4]可知,对于序列 $\{x_i^{(0)}\}$ 的数乘变换序列 $\{y_i^{(0)}\}$ ($\{y_i^{(0)}\} = \alpha_i \{x_i^{(0)}\}$),则 $\{y_i^{(0)}\}$ 对应灰色模型的估计值 $\{\hat{y}_i^{(0)}\}$ 满足

$$\hat{y}_i^{(0)} = \alpha_i \hat{x}_i^{(0)} \quad (23)$$

此外,灰色模型的拟合预测值只与系统行为变量 $\{x_i^{(0)}\}$ 的数乘变换值 α_i 有关,而与驱动因素变量的数乘变换值 $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ 无关。为避免因数据绝对值过小而导致模型精度的降低,对数据序列进行数乘变换,取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 10$,即扩大数据的数量级,经数乘变换后的变形监测序列 $X^{(0)(\alpha)}$ 为

$$X^{(0)(\alpha)} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 8 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 7 & 7 & 9 & 8 \\ 7 & 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}, \text{设置混沌粒子群算法中种群大小}$$

为30,迭代次数为20,变异率为10%,经混沌粒子群算法优化后得到的分数阶阶数为0.89,通过式(23)还原原始变形监测值的估计值为

$$\hat{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 & 0.9 \\ 0.93688 & 0.77196 & 0.80289 & 0.89890 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.75480 & 0.76782 & 0.69350 & 0.82910 \\ 0.73168 & 0.76762 & 0.67954 & 0.82024 \end{bmatrix} \quad (24)$$

2.3 结果分析

由于式(23)对灰色模型均适用,故依据经数乘变换后的变形监测序列 $X^{(0)(\alpha)}$ 建立未经优化的整数阶灰色模型GM(1,1)模型,并与本文提出改进多变量

灰色模型的预测结果进行对比,对比的拟合结果如表1所示。在混沌粒子群算法的优化下,当阶数 $r=0.89$ 时,适应度值MRE达到最小值,模型的拟合值最贴近于真实值,其预测精度最高。当阶数 $r=1$ 时,本文提出的OFGM模型即转化为传统的GM(1,1)模型,其预测精度低于OFGM模型。因此,本文提出的模型在预测数据为小样本、贫信息的特征下,能够有效挖掘数据内部的规律,通过优化分数阶阶数,提升传统整数阶灰色模型的适用性,并达到了模型中最小的MRE值,在提高模型的预测精度上具有一定的工程意义。

由拟合的结果可得出结论:在拟合初期,两模型的拟合精度差距不大,但随着数据序列长度的增加,原始多变量灰色模型的拟合稳定性逐渐变差,从而导致其拟合的精度降低。结果表明:改进多变量灰色模型的模型稳定性更高,对于波动序列拟合的稳定性更强。

3 结 论

本文根据堤防沉降变形数据的小样本、贫信息的乏信息数据特征,提出了一种改进多变量灰色系统的乏信息堤防短期预测模型,结论如下:

表1 堤防沉降变形的不同模型预测表现

实际测值/mm				OFGM(1,n)估计值/mm				MGM(1,n)估计值/mm			
$X_1^{(0)}(k)$	$X_2^{(0)}(k)$	$X_3^{(0)}(k)$	$X_4^{(0)}(k)$	$X_1^{(0)}(k)$	$X_2^{(0)}(k)$	$X_3^{(0)}(k)$	$X_4^{(0)}(k)$	$X_1^{(0)}(k)$	$X_2^{(0)}(k)$	$X_3^{(0)}(k)$	$X_4^{(0)}(k)$
0.7	0.8	0.9	0.9	0.70	0.80	0.90	0.90	0.70	0.80	0.90	0.90
0.9	0.8	0.8	0.9	0.94	0.78	0.80	0.90	0.91	0.78	0.80	0.91
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.7	0.7	0.9	0.8	0.75	0.77	0.69	0.83	0.76	0.93	0.60	0.84
0.7	0.7	0.8	0.8	0.73	0.77	0.68	0.82	0.77	0.97	0.62	0.85
MRE				0.6035				0.7484			

(1)依据实际堤防工程中多测点存在相互关联、相互影响的实际情况,考虑堤防工程的整体性,将传统的单变量灰色模型扩展为多变量灰色模型,使得模型能够描述变形体的整体变形趋势和变形规律。

(2)针对多变量灰色模型主要集中于对原始数据进行整数阶累加后进行建模研究的局限性,融合分数阶微积分与多变量灰色模型,并采用混沌粒子群算法对最优分数阶的阶数进行寻优。结果表明,当分数阶阶数为0.89时,模型达到最小平均绝对误差0.6035,相较于普通多变量灰色模型的0.7484有所减小,对波动数据序列的拟合平稳性有所提高。

参考文献:

[1] 谢亚军,顾浩,苏宇宸,等.考虑植被力学-水力作用的洪泽湖堤防加固效果分析[J].河海大学学报(自然科学版),2024,52(2):61-68.

学版),2024,52(2):61-68.

[2] 夏新涛,叶亮,常振,等.乏信息条件下滚动轴承振动性能可靠性变异过程预测[J].振动与冲击,2017,36(8):105-112,143.

[3] ZHU D K, PANG X X, HUANG K, et al. Analysis of factors influencing impact resistance of protective bearings in vertical magneticlevitation system based on fuzzy theory [J]. Bearing, 1-12.

[4] 张宗亮,程凯,杨再宏,等.红石岩堰塞坝应急处置与整治利用关键技术[J].水电与抽水蓄能,2020,6(2):1-10,25.

[5] 杜镇瀚,钟启明,董海洲,等.堰塞湖风险评估研究综述[J].河海大学学报(自然科学版),2022,50(4):13-25.

[6] 叶莉莉,谢乃明,罗党.累积时滞非线性ATNDGM(1,N)模型构建及应用[J].系统工程理论与实践,2021,41(9):2414-2427.

[7] 靳春玲,苏旻,贡力,等.碳排放约束下的水工隧洞施工机群配置优化[J].河海大学学报(自然科学版),2023,51(3):84-90,120.