

# 基于细观颗粒体系自适应伺服的 软岩高边坡数值模型研究

蔡 敏<sup>1</sup>, 杨明强<sup>2</sup>, 石 崇<sup>3,4</sup>, 吴 苏<sup>3,4</sup>

(1. 南京市秦淮河河道管理处, 江苏 南京 210000; 2. 南京市三汊河河口闸管理处, 江苏 南京 210000;

3. 河海大学 岩土工程科学研究所, 江苏 南京 210098;

4. 河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 江苏 南京 210098)

**摘要:** 细观颗粒流方法是研究岩土大变形的重要工具, 运用该方法的关键是通过伺服令颗粒体系满足一致性条件, 赋予参数后得到想要的宏观性质。针对不规则模型等无法采用常规刚性伺服情况, 提出了一种细观颗粒体系自适应伺服方法, 案例验证表明, 该方法不仅可以让颗粒体系各处均接近伺服应力, 误差小于10%, 且不需要改变模型边界墙的位置, 保证了颗粒流数值模型状态控制的精确性, 可以准确反映岩土材料的力学性质。以某软岩高边坡为例, 研究成果可为解决具体工程边界的细观颗粒流模型构建提供参考。

**关键词:** 细观颗粒体系; 伺服控制; 颗粒流; 宏细观参数

中图分类号: TU34

文献标识码: A

文章编号: 1007-7839(2025)04-0058-0007

## Research on numerical model of high soft rock slope based on adaptive servo of mesoscopic particle system

CAI Ming<sup>1</sup>, YANG Mingqiang<sup>2</sup>, SHI Chong<sup>3,4</sup>, WU Su<sup>3,4</sup>

(1. Nanjing Qinhuai River Administration Office, Nanjing 210000, China; 2. Sancha River Estuary Gate

Management Office, Nanjing 210000, China; 3. Geotechnical Research Institute of Hohai University,

Nanjing 210098, China; 4. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment

Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

**Abstract:** Mesoscopic particle flow method is an important tool to study the large deformation of rock and soil. The key to using this method is to make the particle system satisfy the consistency condition through servo, so that the desired macroscopic properties can be obtained after parameter assignment. Aiming at the situation where the conventional rigid servo cannot be applied to irregular models and the like, an adaptive servo method for the mesoscopic particle system is proposed. Case verification shows that this method can not only make the particle system approach the servo stress everywhere, with an error less than 10%, but also does not require changing the position of the model boundary wall, ensuring the accuracy of the state control of the particle flow numerical model and accurately reflecting the mechanical properties of geotechnical materials. Taking a certain high soft rock slope as an example, the research results serve as an important reference for constructing the mesoscopic particle flow model of specific engineering boundaries.

**Key words:** mesoscopic particle system; servo control; particle flow; macro-micro parameters

收稿日期: 2024-11-04

作者简介: 蔡敏(1987—), 女, 工程师, 硕士, 主要从事水利工程管理工作。E-mail: 2531361118@qq.com



数值仿真是工科力学分析的重要手段,其中颗粒流方法是研究介质变形破坏机理的重要手段。颗粒流一般由边界墙(二维为线、三维为面)与内部颗粒(二维为圆盘、三维为圆球)构成,通过在颗粒-颗粒、颗粒-墙之间设置一定的接触模型,给定一个足够小的时间步,让颗粒体系自由运动,每个时间步不断更新接触力与颗粒的运动状态,等所有颗粒均处于紧密接触、各处分布均匀时,再赋予相应接触黏结模型<sup>[1-2]</sup>。此时黏结得到的颗粒体系能模拟岩石、混凝土等岩土材料的力学性质。

颗粒流数值计算方法已被学者广泛的应用于工科力学分析及工程计算中<sup>[3-5]</sup>。沈筠等<sup>[6]</sup>采用PFC3D建立粗粒土三轴试验模型,通过剪切试验定性分析了宏观和细观参数之间的关系。夏秋实<sup>[7]</sup>结合室内试验与离散元数值模拟,进行刚性与柔性顶部边界条件下筋土相互作用机理研究,从宏观、细观层面深入阐述了两种顶部边界条件下土工格栅与土体的力学响应及变形行为。部分学者采用柔性边界及改进的球颗粒交错式柔性边界开展常规三轴、动三轴及三轴排水等试验<sup>[8-9]</sup>。宋彧等<sup>[10]</sup>采用Plackett-Burman方法分析颗粒流模型细观参数敏感性特征。李可宇等<sup>[11]</sup>建立黏性土的颗粒流数值模型,从摩擦系数、黏结强度、刚度比和孔隙率4方面分析细观参变化对应力-应变曲线关系的影响。张权等<sup>[12]</sup>分析了细观参数对宏观力学参数的影响规律,并确定细观参数的取值范围,同时采用中心组合法及多元回归分析建立了岩石材料平直节理模型的宏-细观参数关系式。付旭等<sup>[13]</sup>建立PFC3D软土三轴压缩模型,采用正交试验对burgers接触模型的宏观、细观参数之间的特征关系进行了分析。

纵观以上方法基本是探究宏观、细观参数之间的影响特征和边界条件的力学响应及改进。而在如何利用颗粒流伺服方法保证颗粒体系合理性的研究较少。现有的边界刚性、柔性伺服控制操作会改变模型的外部轮廓,导致模型范围失真。如果不进行伺服则无法控制颗粒体系的状态,导致赋予的细观参数无法与宏观参数相匹配。因此在需要严格控制模型轮廓或利用边界墙伺服不方便时,颗粒体系无法精确控制状态(各处恰好接近伺服应力),赋予的参数常常无法体现宏观力学性质。

南京秦淮东河铜家山段河道开挖后形成高度接近50 m的高边坡,边坡岩体主要为黄马青组( $T_{2h}$ )泥质粉砂岩<sup>[14]</sup>。对于该部分具有特殊性质的边坡软岩,采用颗粒体系能够更好地描述其在一系列工

况下的变形和破坏。针对现有技术中颗粒体系伺服会改变模型外部轮廓的问题,本文提出了一种细观颗粒体系自适应伺服控制方法,不仅可以使颗粒体系各处均接近伺服应力,还不需要改变模型边界墙的位置,保证了颗粒流数值模型状态控制的精确性,可以准确反映岩土材料的力学性质。

## 1 传统细观模型标定伺服方法

### 1.1 颗粒体系标定伺服方法

目前颗粒离散元法被运用于诸多岩土室内试验的数值模拟中,如压缩试验、剪切试验、弯曲试验、劈裂试验等,构建合理的颗粒离散体系模型是利用颗粒离散元法研究岩土工程问题的必要条件,而为了确保数值结果的正确性,必须保证颗粒离散体系的合理性。为科学合理地反映材料真实的物理特性和宏观、细观力学特性,颗粒离散体系数值模型应该满足一致性条件:

- (1)颗粒体系中颗粒半径范围及分布均合理;
- (2)颗粒体系中,颗粒间相互接触的接触数足够多,能够确保力与力矩能在颗粒间自由传递;
- (3)颗粒数值模型中的颗粒受力合理,且达到受力平衡。

但是,离散颗粒体系在初始构建后一般无法直接达到合理的状态,所以常采用边界伺服的方式使颗粒体系的黏结状态和受力状态合理。

对于任一模型(以二维为例)中相互接触的颗粒,如图1(a)所示,位移仅发生于接触位置,当二者重叠量大,则颗粒体系中蕴藏大量的弹性应变能,自然体系应力状态高、接触密实,反之则体系松散。因此颗粒间力传递的必要条件就是颗粒之间形成接触,而细观组构的重要特性就是接触点的密度,其可用配位数来描述:

$$N_i = \frac{2N_c}{A} \quad (1)$$

式中: $N_i$ 为配位数; $N_c$ 为测量范围颗粒体系中的有效接触数目; $A$ 为测量范围面积。配位数可以理解为试样中平均每个颗粒相接触的颗粒数目,它一定程度上反映试样所处的状态,如密实程度、应力水平等。

图1(b)所示外轮廓可以由多个线性边界连接而成,每一段称为一个墙(wall),用于约束模型。边界伺服方法是通过控制颗粒体系的边界来对初始颗粒体系进行调整,进而使得其处于合理的目标状态,视墙的控制方式分为刚性伺服与柔性伺服两



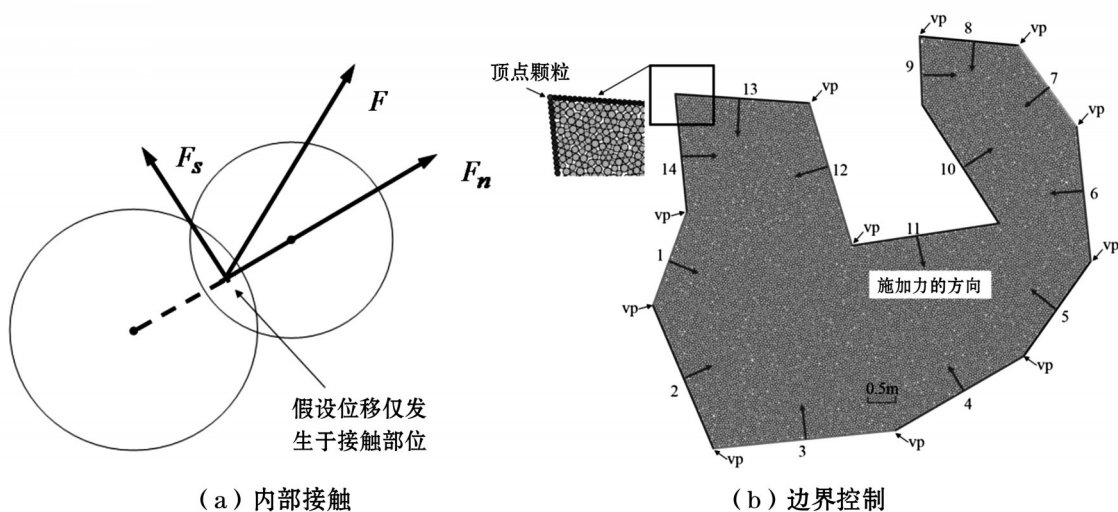


图1 任意边界模型伺服说明(2D情况)

种,前者是边界墙采用一致运动来强迫颗粒体系一起运动;后者是将墙分成多个小区域(边界球),每个小区域的运动有所区别。

无论采用哪一种方法,只有当颗粒体系处于合理状态时,利用该状态颗粒体系开展的标定与工程数值模拟才有借鉴意义。

## 1.2 岩石宏观性质参数获取

宏观岩石力学中经常用弹性模量、变形模量来研究变形。弹性模量一般指单轴(无侧压)情况下应力应变曲线线性段斜率,变形模量为单轴(无侧压)应力应变曲线峰值强度与原点连线的斜率。计算模量只需要在进行单轴计算时分别定义函数即可,如计算弹性模量可以在应力应变曲线上取2个点,自动获取这两点的轴向应变、轴向应力,即可利用公式计算弹性模量,如图2(a)所示。

泊松比也是岩石工程中表征侧向变形的参数,

其定义为单轴压缩条件下侧向应变与轴向应变值的比。在用颗粒离散元(PFC)进行数值模拟时,一般有3种办法来计算考虑。如图2(b)所示:方法一利用伺服用的墙计算试样的平均轴向应变、侧向应变,然后利用公式得出泊松比。但是由于泊松比的计算是基于单轴压缩条件,此时计算径向变形的墙必须贴紧试样才能得出理想的结果,因此通常需要辅助较小的围压、较小的墙-球接触刚度来实现。

一般而言,宏观参数是实验室内获取的,标定就是令数值模拟的曲线能够跟实验室曲线一致。当细观数值曲线得到的宏观参数与实验室参数一致时,表明细观参数即为有效的标定参数。

## 2 细观颗粒体系自适应伺服法

上节常规伺服法是通过边界来强迫颗粒体系运动,自然会导致模型发生改变,但这在复杂问题

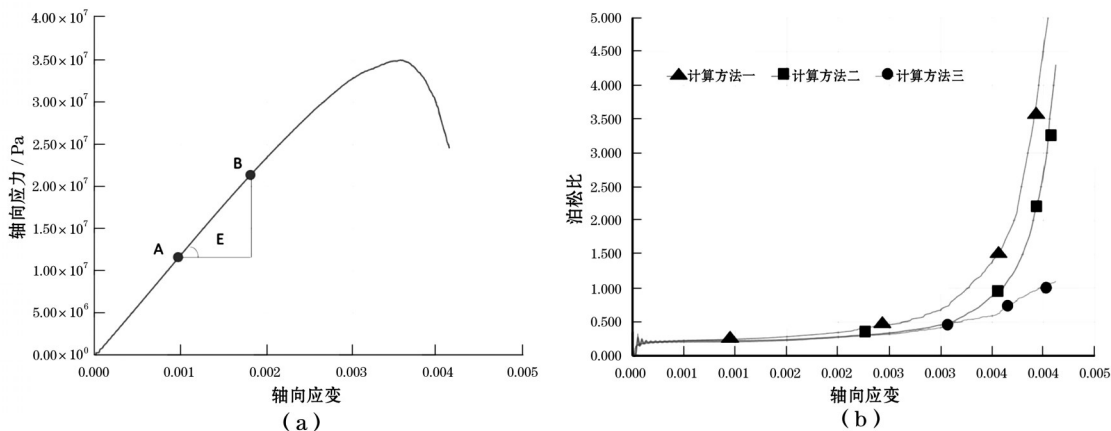


图2 常规伺服模型的弹性变形参数获取方法



时恰是不允许的。如一个复杂滑坡模拟,其地层位置是确定的,边界改变将会导致地层失真。因此需要探索不改变边界位置的内部调节伺服法,该方法是通过颗粒体系半径的放大、缩小,找到一种状态,使得颗粒体系达到想要的状态,从而确保边界位置不变。其基本步骤如下:

(1)根据模型建立要求进行几何边界限制,获得闭合的几何区域;根据预设的颗粒半径范围和初始孔隙率生成多个颗粒,且所有颗粒的颗粒圆心均位于闭合的几何区域内;

利用射线法对每一个颗粒进行位置判断,从每个颗粒的颗粒圆心向右侧引出一条射线,获取该射线与几何区域的边界的交点数量,其中射线方向矢量为(1,0);当一个颗粒对应的交点数量为0或偶数时,删除该颗粒,否则保留该颗粒;利用保留下来的颗粒构成初始颗粒体系。

根据初始颗粒体系中的最大颗粒半径获得测量圆半径;根据几何区域的坐标获得几何区域对应的矩形范围,根据测量圆半径在该矩形范围中设置多个相切的测量圆;从每个测量圆的圆心向右侧方向矢量(1,0)延伸一条射线,并获取该射线与几何区域的边界的交点数量;当一个测量圆对应的交点数量为0或偶数时,删除该测量圆,否则保留该测量圆。测量圆半径的取值范围为 $[5*r_{\max}, 10*r_{\max}]$ ,其中, $r_{\max}$ 为最大颗粒半径。

(2)每个测量圆内部的平均应力和颗粒体系的平均应力的计算方法包括如下步骤:

根据颗粒圆心之间的距离、颗粒圆心与几何区域边界之间的距离和颗粒半径,判断颗粒体系中颗粒-颗粒的接触和颗粒-墙的接触,获取颗粒体系中的接触总数( $n$ );

遍历颗粒体系中的所有接触,计算第 $m$ 个接触到第 $k$ 个测量圆的距离 $d_{mk}$ ,其中, $m \in [1, n], k \in [1, N]$ ,  $N$ 为颗粒体系中测量圆的数目;

当 $d_{mk} \leq R_k$ 时,判断第 $m$ 个接触位于第 $k$ 个测量圆内部,其中, $R_k$ 为第 $k$ 个测量圆的半径;

根据测量圆内部的所有接触来计算测量圆内部的应力张量,计算公式为

$$\bar{\sigma}_{ij}^k = -\frac{1}{A_k} \sum_{N_{ck}} F^{(c)}_{ij} \otimes L^{(c)} \quad (2)$$

式中: $\bar{\sigma}_{ij}^k$ 为第 $k$ 个测量圆内部 $ij$ 方向的应力张量; $A_k$ 为第 $k$ 个测量圆的面积; $N_{ck}$ 为第 $k$ 个测量圆内部的接触数目; $F^{(c)}$ 为接触力向量; $L^{(c)}$ 为连接相互接触的两个颗粒质心的向量; $\otimes$ 为张量积,在二维情况下 $i,$

$j=1, 2$ ,在三维情况下 $i, j=1, 2, 3$ ;

根据测量圆内部的应力张量计算测量圆内部的平均应力,计算公式如下:

$$\bar{\sigma}_k^p = \begin{cases} \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11}^k + \bar{\sigma}_{22}^k) & \text{二维情况下} \\ \frac{1}{3}(\bar{\sigma}_{11}^k + \bar{\sigma}_{22}^k + \bar{\sigma}_{33}^k) & \text{三维情况下} \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\bar{\sigma}_k^p$ 为第 $k$ 个测量圆内部的平均应力。

对所有测量圆内部的平均应力取平均值,获得颗粒体系的平均应力,计算公式为

$$\sigma_s = \frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^N \bar{\sigma}_k^p \quad (4)$$

式中, $\sigma_s$ 为颗粒体系的平均应力。

(3)基于颗粒流软件PFC2D/3D,根据预设的时间步对颗粒体系进行迭代计算,更新颗粒体系中每个接触的接触力、每个颗粒的位置和颗粒速度,实现颗粒自由运动;

在每次颗粒自由运动后,逐个测量圆计算测量圆内部的平均应力与目标伺服应力的差值:

$$d_{\bar{\sigma}_k} = S_{\text{tress}} - \bar{\sigma}_k^p \quad (5)$$

式中: $d_{\bar{\sigma}_k}$ 为第 $k$ 个测量圆内部的平均应力与目标伺服应力的差值; $S_{\text{tress}}$ 为目标伺服应力; $\bar{\sigma}_k^p$ 为第 $k$ 个测量圆内部的平均应力, $k \in [1, N]$ ,  $N$ 为颗粒体系中测量圆的数目。

根据差值 $d_{\bar{\sigma}_k}$ 计算第 $k$ 个测量圆内部颗粒的半径改变量:

$$dr_k = \alpha \times d_{\bar{\sigma}_k} \times K_n \quad (6)$$

式中: $dr_k$ 为第 $k$ 个测量圆内部颗粒的半径改变量; $\alpha$ 为逼近系数; $K_n$ 为颗粒间的法向接触刚度。

根据半径改变量 $dr_k$ 更新测量圆内每个颗粒的尺寸,公式如下:

$$R_n = R_{0n} - dr_k \quad (7)$$

式中: $R_{0n}$ 为更新前的颗粒半径; $R_n$ 为更新后的颗粒半径。

在二维情况下,判断颗粒是否属于测量圆的方法为:

(4)遍历颗粒体系中的所有颗粒,计算每个颗粒圆心到测量圆圆心的距离:

$$d_n = \sqrt{(x_k - x_{0n})^2 + (y_k - y_{0n})^2} \quad (8)$$

式中: $d_n$ 为第 $n$ 个颗粒圆心到第 $k$ 个测量圆圆心的距离; $(x_k, y_k)$ 为第 $k$ 个测量圆的圆心坐标; $(x_{0n}, y_{0n})$ 为第 $n$ 个颗粒的圆心坐标。

当 $d_n < R_k$ 时,判断第 $n$ 个颗粒位于第 $k$ 个测量圆内部,其中, $R_k$ 表示第 $k$ 个测量圆的半径。



遍历更新后的所有颗粒对应的接触,获取颗粒-墙的接触,并计算每个颗粒圆心与其对应的颗粒-墙的接触之间的距离:

$$d_2 = \sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2} \quad (9)$$

式中:  $d_2$  为颗粒圆心与颗粒-墙的接触之间的距离;  $(x_c, y_c)$  为颗粒-墙的接触的坐标;  $(x_i, y_i)$  为更新后的颗粒圆心的坐标。

当  $d_2 < \lambda \times R_n$  时,认为更新后的该颗粒镶嵌在几何区域的边界内,将该颗粒删除,否则保留更新后的该颗粒,其中,  $\lambda$  为经验参数,  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $R_n$  为更新后的颗粒半径;

(5) 利用保留下来更新后的颗粒构成更新后的颗粒体系。根据更新后的颗粒体系的平均应力和目标伺服应力计算误差率:

$$E_{\text{error}} = |\sigma_s - S_{\text{stress}}| / S_{\text{stress}} \quad (10)$$

式中:  $E_{\text{error}}$  为更新后的颗粒体系的平均应力和目标伺服应力之间的误差率;  $\sigma_s$  为更新后的颗粒体系的平均应力;  $S_{\text{stress}}$  为目标伺服应力。

当  $S_{\text{stress}} > e$  时,重复步骤(3)~(5),对颗粒体系进行迭代更新,直到  $S_{\text{stress}} \leq e$ ,获得最优颗粒体系模型,其中,  $e$  为误差容许值。

在迭代更新颗粒系统的过程中获取颗粒系统的平均应力变化曲线,并根据平均应力变化曲线调整逼近系数。

基于以上过程,完整的计算流程图如图3所示。

### 3 模型验证

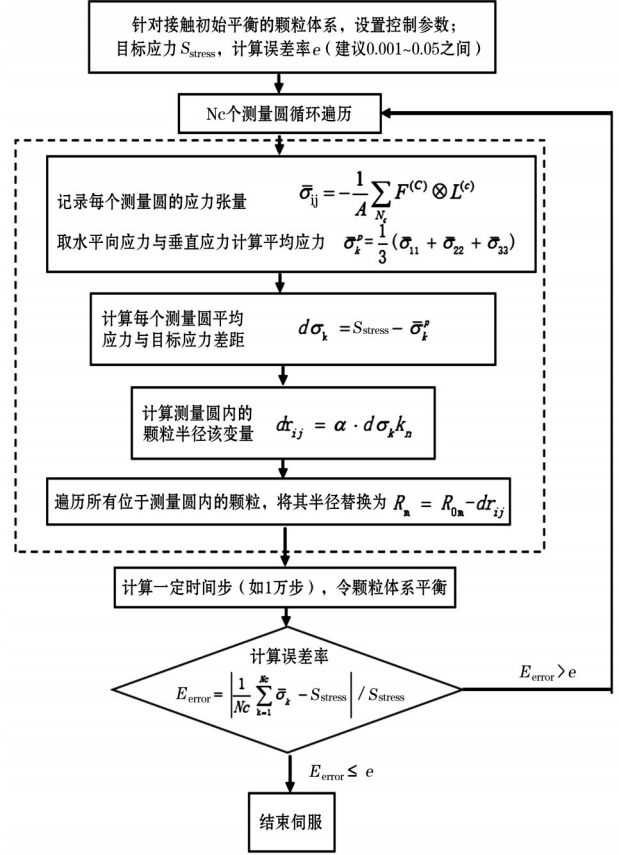


图3 细观颗粒体系自适应伺服流程图(3D 情况)

为了验证本文所提细观颗粒体系自适应伺服法的合理性,如图4所示构造一个长方形试样,宽度

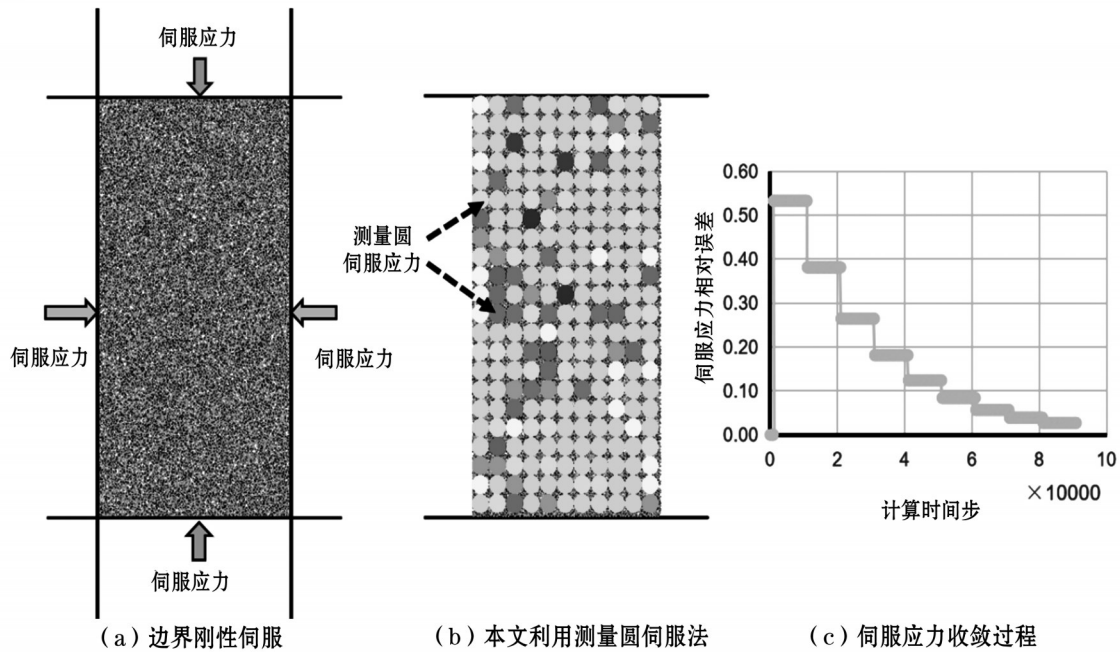


图4 伺服方法对比模型



2.5 m,长5.0 m,初始孔隙率0.18,颗粒半径0.03~0.045 m,伺服应力取1.0 MPa,由于模型简单,完全可用常规的刚性伺服法进行伺服。令颗粒体系仅以接触刚度 $1 \times 10^9$  N/m至初始平衡,此时分别采用刚性伺服法(图4(a))与本文方法(图4(b))伺服到目标应力,其中本文伺服方法应力迭代收敛过程如图4(c)所示,直到模型误差小于0.05且不平衡力足够小( $10^{-5}$ ),此时表明模型达到基本一致性条件。然后赋予表1所示平行黏结模型细观参数,控制模型上、下压载板以0.001 m/s相向运动,观察单轴压缩下轴向应力与应变曲线的差异性。

表1 应用效果分析

颗粒细观参数	取值	颗粒细观参数	取值
颗粒最小半径/m	0.03	平行黏结模量/GPa	50.00
颗粒最大半径/m	0.045	线性接触模量/GPa	15.0
颗粒密度/(kg/m <sup>3</sup> )	2 500	法向黏结强度/MPa	100.0
颗粒法向刚度	$2.8 \times 10^9$	切向黏结强度/MPa	250.0
颗粒刚度比	2.50	摩擦系数	1.5
颗粒阻尼	0.50	弯矩系数	0.70
黏结激活隙宽	$1.0 \times 10^{-5}$	内摩擦角/(°)	80

在模型中心设置一个半径为0.4倍模型宽度的测量圆,利用公式(1)统计其配位数随迭代过程变化,计算结果如图5所示。发现刚性伺服法初始配位数为3.49,用1 MPa压力强制4个边界伺服后稳定在3.77;而本文方法初始配位数为3.62,经过多级调整收敛于3.65,收敛值非常接近,说明两种伺服法的最终状态非常接近,而其最大的差别在于,

图4(a)模型上、下、左、右墙均有位移变化,但颗粒尺寸保持在0.03~0.045 m;图4(b)模型边界不动,但颗粒尺寸变为0.03~0.047 m,尺寸与初步设计值略有增大,由于建模时其尺寸范围都是经验设计,因此这种微小的尺寸改变不会影响数值结果。

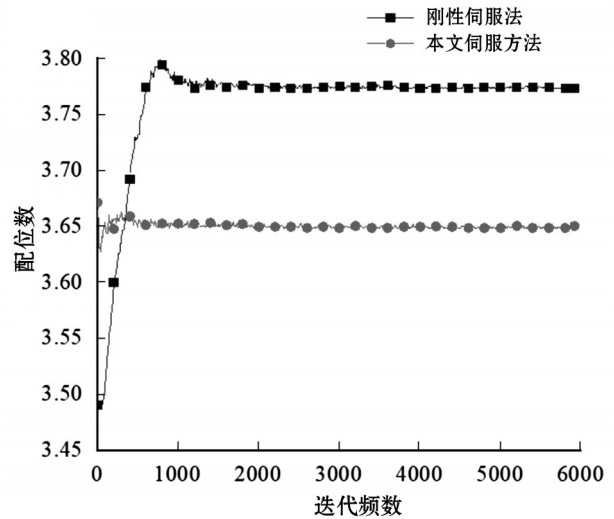


图5 两种伺服方法配位数变化对比

由图6可以看出,采用刚性伺服法计算弹性模量为28.86 GPa、泊松比为0.23,本文方法为27.68 GPa、泊松比0.21,二者误差分别为4.1%、8.7%,但两个模型在单轴压缩条件下的破坏模型虽然都呈现脆性破坏,但位置却不相同,这显然是因为颗粒体系随机性引起的,而这种随机性造成的误差通常处10%之内,因此可认为两种方法伺服得到的数值模型的宏观力学性质基本一致,表明本文所提方法在应用于规则细观数值模型时与常用的刚性伺服法效果相比异曲同工,同样可以实现目的。

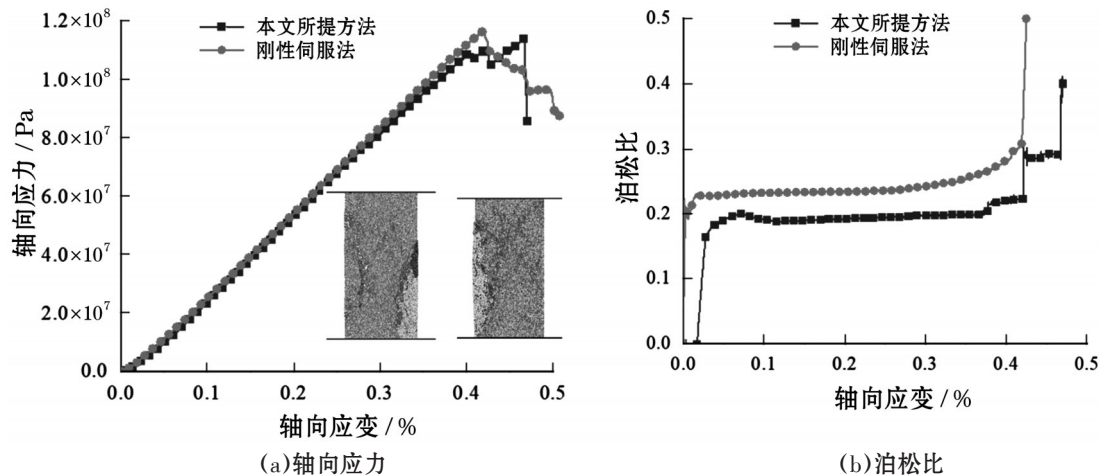


图6 两种伺服得到模型相同参数下单轴压缩曲线与泊松比变化规律



基于本文方法建立的典型复杂模型如图7所示,由于建立的模型各处配位数等参量室内试验参数相接近,因此计算效果也能得到保证,标定的细观参数也更为合理。

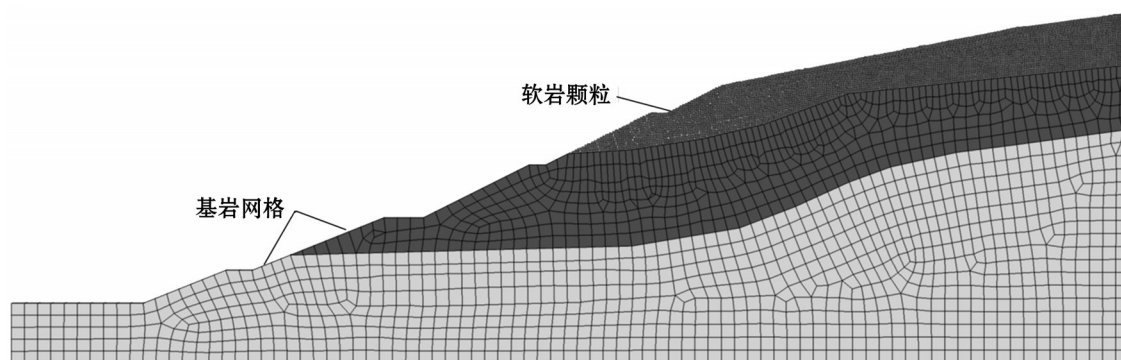


图7 典型模型的建立实例

内平均应力的放大或缩小,最终迭代至伺服应力,从始至终不改变模型的边界位置和形状;在伺服控制过程中,对因颗粒放大而导致卡在几何区域边界上的颗粒,通过接触判断直接删除,不会影响整体的应力控制。因此利用本文方法可以快速有效地获得满足要求的颗粒体系,在最优颗粒体系模型的基础上赋予黏结模型参数进行计算可保证模型状态的精确控制,从而确保数值计算结果正确性,特别适用非常不规则模型范围内颗粒体系的生成。

## 5 结 论

基于岩土工程颗粒离散元体系,针对现有刚性伺服方法与柔性边界伺服法需要改变模型尺寸的缺陷,提出了一种细观颗粒体系自适应伺服方法,并探讨了该方法的适用性。得到主要结论如下:

(1)本文提出的细观颗粒体系自适应伺服方法自始至终不改变模型的边界位置和形状,确保了边界的不改变性,特别适用于复杂边界条件、规则刚性伺服无法实现时颗粒体系的一致性。

(2)采用本文方法伺服后的模型无论是二维还是三维情况,其力学特性均有很好的 consistency,证明该方法切实有效。

(3)由于细观复杂模型难以伺服,现有文献中的计算结果往往为凑参数结果,本文提出的方法为解决这一问题提供了一条途径。

### 参考文献:

[1] 石崇. 颗粒流数值模拟技巧与实践[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2015.

## 4 讨 论

与现有刚性伺服方法相比,本文所提内部调整伺服方法通过改变测量圆内的颗粒半径实现模型

- [2] 石崇. 岩土工程颗粒流数值模拟技术应用案例[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2023.
- [3] 金爱兵, 王凯, 张秀凤, 等. 基于颗粒流程序的广义 Kelvin 模型及其应用[J]. 岩土力学, 2015, 36(9): 2695–2701.
- [4] 杨振伟, 金爱兵, 王凯, 等. 基于颗粒流程序的黏弹塑性本构模型开发与应用[J]. 岩土力学, 2015, 36(9): 2708–2715.
- [5] 孙其诚, 等. 颗粒物质力学导论[M]. 科学出版社, 2009.
- [6] 沈筠, 莘子健. 粗粒土三轴试验颗粒流细观参数敏感性分析[J]. 安徽建筑, 2021, 28(9): 224–226.
- [7] 夏秋实. 刚性与柔性顶部边界条件下土工格栅拉拔试验宏观研究[D]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2021.
- [8] 刘操. 基于 PFC3D 柔性边界条件的饱和密实含泥砂土动力特性模拟分析[D]. 南昌: 南昌大学, 2020.
- [9] 蒋成龙, 许成顺, 张小玲, 等. 三维柔性边界构建方法及其对砾质土变形发展影响的离散元数值研究[J]. 土木工程学报, 2021, 54(5): 77–86.
- [10] 宋彧, 冷国杰, 杨安玉. 基于 Plackett–Burman 试验设计的颗粒流模型细观参数敏感性分析[J]. 浙江水利科技, 2022, 50(4): 97–102.
- [11] 李可宇, 杨果岳, 李良吉, 等. 基于颗粒流模拟的黏性土宏观细观参数相关性分析[J]. 实验力学, 2020, 35(6): 1147–1156.
- [12] 张权, 饶秋华, 沈晴晴, 等. 基于中心组合设计的颗粒流平直节理模型宏-细观参数相关性研究[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2021, 52(3): 779–789.
- [13] 付旭, 侯定贵, 李茜, 等. 软土蠕变颗粒流宏观细观参数特征及标定方法[J]. 土工基础, 2023, 37(3): 501–505.
- [14] 张莉萍, 邱德俊, 许宝田. 节理化软岩开挖边坡变形及稳定性分析[J]. 江苏水利, 2017(3): 41–45.